Твой помощник
«Степень с натуральным показателем»

Как твои успехи, профессор? Что-то получается, а что-то и нет?! Это не беда, хотя царской дороги к математике, действительно, не существует. Но для того и создан я, чтобы шагать бодро и весело к такой серьёзной науке. У тебя плохое настроение? Тогда не берись за формулы, возьмись прежде всего за себя: посмотри на любимый предмет и заставь себя улыбнуться; улыбка захватит с собой своего друга – хорошее расположение духа. Теперь приступим?

Ты уже, наверное, заметил, что математики – народ «ленивый». Всё-то они сокращают да ужимают, лишь бы лишнюю буковку не написать. Так и в случае со степенью. Вот смотри: чтобы не писать длинное $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$, они придумали короткую запись 3^7 (читается «три в седьмой степени»). Заметь: то число, которое встречается в произведении много-много раз, пишется как обычно и называется **основанием степени**. В нашем случае это 3. Число, которое пишется наверху и более мелко, **показывает**, сколько раз мы встречаемся с первым числом. Оно называется **показателем степени**. В нашем случае – это 7. Можешь проверить меня, профессор! Пересчитай, сколько раз встретилась в записи «тройка».

Итак,

$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^7$.

$$\textit{основание} \Rightarrow\ 3^{7\ \Leftarrow \textit{показатель}}.$$

Потренируемся ещё.

а) $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4=4^5$,

$\textit{основание} \Rightarrow\ 4^{5\ \Leftarrow \textit{показатель}}$;

б) $-9\cdot(-9)\cdot(-9)=(-9)^3$;

Заметь, что, когда мы сталкиваемся с отрицательными числами, появляются скобки. Основание и показатель называй теперь сам!

в) $2\cdot2\cdot2=\ldots$

Я думаю, что в таком деле, я тебе больше не нужен.

г) $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=\ldots$

д) ☺·☺·☺·☺·☺·☺·☺=…

е) $8=\ldots$

Есть вопросы? Нет! Тогда перейдём к строгому языку.

Определение.

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n*, большим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*.

Степенью числа *a* с показателем 1 называется само число *a*.

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ раз}};$$

$$a^1=a.$$

$$\textit{основание} \Rightarrow\ a^{n\ \Leftarrow \textit{показатель}}$$

Читается: «*a* в степени *n*», «*n*-я степень числа *a*». Математическое действие называется возведением в степень.

Примеры.

а) $x^3=x\cdot x\cdot x$;

б) $y^7=\ldots$;

в) $5^3=5\cdot5\cdot5=125$;

г) $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=\ldots$;

д) $2^6=\ldots$;

е) $1^3=1\cdot1\cdot1=1$;

ж) $0^8=0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot0=0$;

Вообще, в какую бы степень мы ни возводили 1 и 0, с ними ничего не происходит. Единица остаётся единицей, а нуль – нулём!

з) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$;

ж) $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000$;

Каков показатель, столько и нулей!

и) $10^5 = \ldots$;

к) $100^4 = \ldots$;

л) $(-5)^4 = -5 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$;

м) $(-5)^3 = -5 \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$;

н) $(-5)^2 = -5 \cdot (-5) = 25$;

о) $(-5)^1 = -5$;

Заметим, что при возведении в степень с чётным показателем получается положительное число, а при возведении в степень с нечётным показателем получается отрицательное число.

Поэкспериментируй сам!

п) $(-2)^6 = \ldots$;

р) $(-2)^5 = \ldots$;

с) $(-1)^{666} = \ldots$;

Отметим очередную немаловажную деталь. Сравни:

т) $(-5)^2 = -5 \cdot (-5) = 25$;

у) $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$;

Есть разница? В последнем примере «минус» в квадрат не возводится! На него операция «возведение в степень» не действует! Там нет скобок, а именно они указывают «сферу влияния» математического действия!

Пробуй!

ф) $(-3)^4 = \ldots$;

х) $-3^4 = \ldots$;

ц) $(-3)^3 = \ldots$;

ч) $-3^3 = \ldots$;

Напоследок самое сложное. Дроби! На самом деле и они не такие уж страшные.

ш) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

Обрати внимание, что в степень возводится отдельно числитель и знаменатель, поэтому промежуточные выкладки можно пропускать.

щ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$;

Следует научиться писать ответ сразу. Определяемся со знаком. Результат должен быть отрицательным, так как степень нечётная, поэтому нечего писать кучу «минусов» – достаточно одного. Отдельно возводим в степень числитель и знаменатель: двойку и тройку возвести в куб можно и в уме. Не так ли?

э) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \ldots$

Чуть-чуть поговорим и напишем ответ! Ещё не веришь?

Так как возводим в чётную степень, то результат должен быть положительным, поэтому забываем про «минус» – он нас больше не волнует. Возводим в квадрат числитель: четыре в квадрате – это 16. Возводим в квадрат знаменатель: пять в квадрате – это 25. Ответ готов: $\dfrac{16}{25}$. Совсем не трудно!

Со смешанными дробями на один шаг больше. Сначала их надо превратить в неправильную дробь: умножить знаменатель на целую часть и, прибавив числитель, записать результат над дробной чертой, под дробной чертой пишется прежний знаменатель.

ю) $\left(1\dfrac{4}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{9}{5}\right)^2 = \dfrac{81}{25}$.

я) $\left(-3\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dots$.

Пример посложнее, который покажет, как важно следить не только за числами, но и за знаками.

$$-\left(-2\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{81}\cdot(-3)^3.$$

Сделаем его сначала по действиям. Внимательно следи за знаками!

Пишем

1) $\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{7}{3} = \dfrac{49}{9}$;

Озвучиваем

1) Возведём в квадрат дробь $-2\dfrac{1}{3}$. Чтобы возвести в степень смешанную дробь, её нужно превратить в неправильную. Обратим внимание на то, что результат вычислений должен быть положительным, так как мы возводим в чётную степень, поэтому о минусе можно забыть сразу. А вот скобки придётся по-прежнему писать. Если мы их не напишем ($\dfrac{7^2}{3}$), то в квадрат будет возводиться не вся дробь, а только её числитель. А дальше уже дело «техники», которой, я надеюсь, ты овладел, профессор!

2) $(-3)^3 = -3\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$;

2) Возведём в куб число -3. Замечаем сразу, что результат вычислений должен быть отрицательным, так как мы возводим в нечётную степень.

3) $\dfrac{1}{81}\cdot(-27) = -\dfrac{1}{3}$;

3) Умножим дробь $\dfrac{1}{81}$ на второй результат, то есть на -27. По-прежнему следим за знаками. Результат должен получиться со знаком «минус», так как умножаются числа с разными знаками.

4)
$$-\frac{49}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{49}{9} + \frac{1}{3} = \frac{-49+3}{9} = -\frac{46}{9} = -5\frac{1}{9}.$$

4) Не забывая первый «минус», который не подвластен возведению в квадрат, выполним вычитание дробей.

Запишем ответ.

Итак, $-\left(-2\dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{81}\cdot(-3)^3 = -5\dfrac{1}{9}$.

Можно делать всё в строчку и короче.

$$-\left(-2\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{81}\cdot(-3)^3=-\left(\frac{7}{3}\right)^2+\frac{27}{81}=-\frac{49}{9}+\frac{1}{3}=\frac{-49+3}{9}=-\frac{46}{9}=-5\frac{1}{9}.$$

Проанализируй сам!

Свойства степени с натуральным показателем

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

Примеры:

а) $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$;

б) $y^2 \cdot y = y^{2+1} = y^3$;

в) $a^3 \cdot a^5 = a^8$;

г) $b^3 \cdot b^5 \cdot b = \ldots$;

д) $5^8 \cdot 25 = 5^8 \cdot \underbrace{5^2}_{25} = \ldots$

2. $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя делимого вычитают показатель делителя.

Примеры:

а) $y^3 : y = y^{3-1} = y^2$;

б) $\dfrac{\left(-1\frac{1}{2}\right)^6}{\left(-1\frac{1}{2}\right)^2} = \left(-1\frac{1}{2}\right)^4 = \ldots$;

в) $\dfrac{7^9 \cdot 49}{7^{10}} = \dfrac{7^9 \cdot 7^2}{7^{10}} = \dfrac{7^{11}}{7^{10}} = \ldots$;

г) $\dfrac{3^9 \cdot 27}{3^{11}} = \ldots$

3. $a^0 = 1$.

Степень числа *a*, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.

Примеры:

а) $\dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 = 1$;

б) $(-3{,}2)^0 = 1$;

в) $-3{,}2^0 = -1$;

г) $(-10000)^0 = \ldots$;

д) $-\left(3\frac{1}{3}\right)^0 = \ldots$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

Примеры:

а) $(-2abc)^3 = (-2)^3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = -8a^3b^3c^3$;

б) $0{,}25^{15} \cdot 4^{15} = (0{,}25 \cdot 4)^{15} = 1^{15} = 1$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^7 \cdot 1{,}5^7 = \ldots$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

При возведении в степень дроби возводят в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записывают в числитель, а второй в знаменатель новой дроби.

Примеры:

а) $\left(1\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{9^2}{8^2}=\frac{81}{64}=\ldots;$

б) $\frac{21^3}{7^3}=\left(\frac{21}{7}\right)^3=3^3=\ldots;$

в) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3=\ldots;$

г) $\frac{45^2}{9^2}=\ldots$

6. $\left((a)^m\right)^n=a^{mn}$.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

Примеры:

а) $\left(x^3\right)^5=x^{3\cdot5}=x^{15};$

б) $\left(a^2\right)^3=\ldots;$

в) $\left((x)^3\right)^4\cdot x^8=x^{12}\cdot x^8=x^{20};$

г) $\left(x^2\right)^3\cdot\left(x^3\right)^5=\ldots;$

д) $\frac{3^7\cdot27}{\left(3^4\right)^3}=\frac{3^7\cdot3^3}{3^{12}}=\frac{3^{10}}{3^{12}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9};$

г) $\frac{\left(2^5\right)^2}{2^6\cdot4}=\ldots;$

Шпаргалка
Степень

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

1. $a^1 = a$;
2. $a^0 = 1$;
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
4. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
5. $\left((a)^m\right)^n = a^{mn}$;
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.