Уравнения

Доброго времени суток тебе, профессор!

Вижу по твоим глазам, с каким «удовольствием» ты решаешь уравнения. А потому, чтобы облегчить твои «страдания», советую не откладывать меня в сторону и тут же тянуться к полке, где стоит заветный «решебник».

Профессор, ты ещё не отложил меня в сторону? Тогда приступим.

§1 Введение

Во-первых, ты должен уметь узнавать уравнение среди прочих математических «вещей» и давать ему определение. Сначала попробуй это сделать без моей помощи. Как ты думаешь, что из предложенного является уравнением, а что – нет. Почему?

1) $7+3$;
2) $3x^2+x-1$;
3) $7+3=10$;
4) $-5x^2-3=2x$;
5) $2x-3y=0$.

Если есть какие-то сомнения, то предлагаю тебе ещё раз внимательно прочитать определение уравнения, но не зазубривать его, а понять.

Уравнение *– это равенство, содержащее переменную (или несколько переменных).*

Заметь в этом определении существенные признаки (как узнать уравнение?):

а) знак равенства;

б) переменная (или переменные).

Вернёмся к заданию. Знак равенства есть в 3-ем, 4-ом и 5-ом примерах, а переменные – во 2-ом, 4-ом и 5-ом. Одновременно же знак равенства и переменные есть только в 4-ом и 5-ом примерах. Значит, (4) и (5) – это уравнения.

Во-вторых, профессор, ты должен знать, что означает – «решить уравнение».

Решить уравнение *– значит найти все его корни или доказать, что корней нет.*

Естественно, возникает вопрос: «Что называют корнем уравнения?»

Поэтому, в-третьих, профессор, тебе придётся запомнить и следующее определение:

Корень уравнения *– значение переменной (или переменных), при котором (которых) уравнение обращается в верное равенство.*

Как ты думаешь, корнем какого уравнения является число 3.

1) $10(2x-1)=16x+2$;
2) $(y-4)(y+4)=7$.

Инструкция.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, подставим 3 вместо переменной в первое уравнение.

$10(2\cdot3-1)=16\cdot3+2$,

$10(6-1)=48+2$,

$10\cdot5=50$,

$50=50$.

Мы получили верное равенство, значит, число 3 является корнем первого уравнения.

Со вторым уравнением тебе придётся повозиться самостоятельно.

В-четвёртых, тебе следует чётко усвоить свойства уравнений. Их всего лишь два!

Свойства уравнений.

1. В уравнении можно переносить слагаемое из одной части в другую, меняя его знак на противоположный.

(Как это понять? Представь себе рычажные весы. На правой и на левой чаше весов лежат, например, по 5 одинаковых гирь. Весы, очевидно, находятся в равновесии. Если убрать с одной чаши, например, 2 гири, то равновесие нарушится. Чтобы его восстановить, нужно убрать 2 гири и с другой чаши весов).

$x+10=33$,

Если «убрать» 10 из левой части уравнения, то, чтобы сохранить равенство, нужно «убрать» 10 и из правой части.

$x=33-10$,

Другими словами, я перенёс 10 в правую часть, изменив знак.

2. Обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, кроме нуля (только не на 0!).

(Как это понять? Представь себе рычажные весы. На правой и на левой чаше весов лежат, например, по 5 одинаковых гирь. Весы, очевидно, находятся в равновесии. Если увеличить одновременно число гирь на левой и на правой чаше, например, в 2 раза, то равновесие не нарушится (и на левой, и на правой чаше теперь будет по 10 одинаковых гирь). Также, если сократить одновременно число гирь на правой и левой чаше, например, в пять раз, равновесие не нарушится (и на левой, и на правой чаше теперь будет по 1 гире)).

Инструкция.

В одних случаях удобно умножать обе части уравнения на одно и то же целое число. В других – делить, в третьих – умножать и делить одновременно.

$a)\frac{1}{7}x = 3,$

В подобных случаях, чтобы «освободить» x, удобно умножать обе части уравнения на одно и то же число. В нашем уравнении следует умножить на 7.

$\frac{1}{7}x = 3 \;\Big|\cdot 7,$

$7 \cdot \frac{1}{7}x = 7 \cdot 3,$

x=21.

б)7x=3,

В подобных случаях, чтобы «освободить» x, удобно обе части уравнения разделить на одно и то же число. В нашем уравнении следует разделить на 7.

$7x = 3 \;\Big|:7,$

$\frac{7}{7}x = \frac{3}{7},$

$x = \frac{3}{7}.$

в) $\frac{3}{5}x = 4,$

В подобных случаях, чтобы «освободить» x, удобно обе части уравнения сначала умножить на одно и то же число, а затем разделить на одно и то же (но другое) число. В нашем уравнении следует умножить на 5 и разделить на 3.

$\frac{3}{5}x = 4 \;\Big|\cdot 5,$

$3x = 20 \;\Big|:3,$

$x = \frac{20}{3},$

$x = 6\frac{2}{3}.$

§2 Линейные уравнения (приводимые к линейным)

Необходимые знания.

Правила раскрытия скобок.

Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знаки каждого слагаемого, заключенного в скобки.

$x+(20x-7)=x+20x-7.$

Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак *каждого* слагаемого, заключенного в скобки.

$x-(20x-7)=x-20x+7.$

Подобные слагаемые - слагаемые с одинаковой буквенной частью.

$2x$ *и* $-5x$, 2 *и* 3, $23xy$ *и* $-5xy$, $34x^2$ *и* x^2 *и др.*

Правило приведения подобных слагаемых.

Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

$\underline{xy}-\underline{2xy}+\underline{\underline{23x}}-\underline{12xy}+\underline{\underline{14x}}-2=(1-2-12)xy+(23+14)x-2=-13xy+37x-2.$

Правило умножения одночлена на многочлен.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

$x(xy-2x^2+3)=x\cdot xy-x\cdot 2x^2+x\cdot 3=x^2y-2x^3+3x.$

Правило умножения многочлена на многочлен.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

$(x+2y)(2x-y)=x\cdot 2x-x\cdot y+2y\cdot 2x-2y\cdot y=2x^2-\underline{xy}+\underline{4xy}-2y^2=2x^2+3xy-2y^2.$

Линейное уравнение – это уравнения вида $ax+b=0$, где x - переменная, a и b – некоторые числа.

1. случай: $a\neq 0$.

$ax+b=0,$

$ax=-b,$

$x=-\dfrac{b}{a},$

уравнение имеет единственный корень.

2. случай: $a=0$, $b\neq 0$.

$ax+b=0,$

$0\cdot x+b=0,$

$0+b=0,$

$0=-b$, но $b\neq 0$.

уравнение корней не имеет.

3. случай: $a=0$, $b=0$.

$ax+b=0,$

$0\cdot x+0=0,$

$0=0.$

уравнение имеет бесконечно много корней.

Алгоритм решения линейных уравнений (приводимых к линейным)

1. упростить левую и правую часть уравнения.
   – раскрыть скобки;
   – умножить одночлен (многочлен) на многочлен;
   – привести подобные слагаемые.
2. Слагаемые с неизвестной перенести в одну часть уравнения, а все остальные слагаемые – в другую часть уравнения.
3. Привести подобные слагаемые.
4. Решить получившееся простейшее линейное уравнение (см. «три случая»).

Примеры.

Пример 1

$15(x+2)-30=12x,$

$15x+30-30=12x,$

$15x=12x,$

$15x-12x=0,$

$3x=0 \;|:3,$

$x=\frac{0}{3},$

$x=0.$

Ответ: $x=0.$

Пример 1

Упрощаем: умножаем одночлен 15 на двучлен x+2.

Упрощаем: приводим подобные слагаемые 30 и –30.

Переносим 12x в левую часть, меняя знак.

Приводим подобные слагаемые 15x и -12x.

Получаем уравнение вида ax=-b, где a≠0 (первый случай).

Делим обе части уравнения на 3.

Записываем ответ (уравнение имеет один корень, равный 0).

Пример 2

$6(1+5x)=5(1+6x),$

$6+30x=5+30x,$

$30x-30x=5-6,$

0=-1.

Ответ: корней нет.

Пример 2

Упрощаем: умножаем одночлен 6 на двучлен 1+5x, и одночлен 5 на двучлен 1+6x.

Переносим 30x в левую часть, а 6 – в правую часть, меняя их знаки.

Приводим подобные слагаемые 30x и –30x, 5 и –6.

Получаем уравнение вида ax=-b, где a=0, b≠0, т. е. неверное равенство (случай 2).

Значит, уравнение корней не имеет (не найдется такого значения для x, при котором уравнение $6(1+5x)=5(1+6x)$ обратится в верное равенство). Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения

$а)(23+3x)+(8x-41)=15,$

$б)(19+2x)-(5x-11)=25,$

$в)(3{,}2y-1{,}8)-(5{,}2y+3{,}4)=-5{,}8,$

$г)1-(0{,}5x-15{,}8)=12{,}8-0{,}7x,$

$д)3{,}8-1{,}5y+(4{,}5y-0{,}8)=2{,}4y+3,$

$е)4{,}2y+0{,}8=6{,}2y-(1{,}1y+0{,}8)+1{,}2.$

§3 Квадратные уравнения (приводимые к ним).

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a\neq0$.

a-**первый коэффициент** (***будь внимателен- первый коэффициент всегда стоит при*** x^2***!!!***),

b-**второй коэффициент** (***будь внимателен- второй коэффициент всегда стоит при x!!!***),

c-**свободный член**.

Неполное квадратное уравнение – это квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Неполные квадратные уравнения (приводимые к ним).

Неполные квадратные уравнения вида (приводимые к виду):	**Алгоритм действий**
$ax^2+bx=0$, $x(ax+b)=0$, $x=0$ или $ax+b=0$, $ax=-b$, $x=-\dfrac{b}{a}$.	0.Упростить уравнение и привести его к виду $ax^2+bx=0$, если это требуется. 1.Вынести общий множитель за скобки. 2.Приравнять нулю первый и второй сомножители. 3.Решить два полученных линейных уравнения. 4.Записать ответ. *<u>Замечание</u>* В итоге должно получиться два корня, один из которых будет нулем.

Пример

$\frac{2}{3}x^2+7x=0$.	Выносим общий множитель за скобки.
$x\left(\frac{2}{3}x+7\right)=0$	
$x=0$ или $\frac{2}{3}x+7=0$	Приравниваем нулю первый и второй сомножители. Первое полученное линейное уравнение уже решено, поэтому нам остается решить только второе.
$\frac{2}{3}x=-7$	а) переносим 7 в правую часть, не забывая менять знак.
$\frac{2}{3}x=-7 \mid\times3$ $2x=-21 \mid:2$ $x=-\frac{21}{2}$ $x=-10{,}5$	б) «освобождаем» x от дроби $\frac{2}{3}$. *<u>Совет</u>*: Чтобы «освободить» x от дроби $\frac{2}{3}$, можно поступить следующим образом: обе части уравнения умножить на 3 и поделить на 2 (обычно эти действия производятся в уме; но для тех, кому это непривычно, предложен подробный вариант решения).
Ответ: -10,5	Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения

а) $20x^2 - 2x = 0$,

б) $\frac{1}{5}x^2 + x = 0$,

в) $\frac{3}{7}x^2 - 9x = 0$,

г) $5x^2 - 5 = 0$

д) $\frac{3}{4}x = 27x^2$,

е) $(x-2)(x+2)=7x-4$,

ж) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

з) $(3x-1)(1+3x) = -1 + x$

и) $-7x^2 + 1 = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2$,

к) $(x-3)^2 = 6\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}\right)$,

л) $x^2 - \frac{1}{9} = 0$

Неполные квадратные уравнения вида (приводимые к виду):

$ax^2+c=0$,

$ax^2 = -c$,

$x^2 = -\frac{c}{a}$,

1-й случай: $\frac{c}{a} < 0$, уравнение имеет два корня.

$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$,

$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

2-й случай: $\frac{c}{a} > 0$, уравнение не имеет корней (мы не знаем такого числа, квадрат которого отрицателен).

Алгоритм действий

0.Упростить уравнение и привести его к виду $ax^2 = -c$.(в простейшем случае перенести свободный член в правую часть).

1.»Освободить» x^2 от коэффициента a.

а) если в правой части получилось число отрицательное, то уравнение корней не имеет.

б) если в правой части получилось число положительное, то первый корень следует найти путем извлечения арифметического квадратного корня из правой части, а чтобы получить второй корень, следует всего лишь записать первый корень с противоположным знаком.

2.Записать ответ.

Примеры

Пример 1.

$\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$,

$\frac{1}{2}x^2 = 8$,

$\frac{1}{2}x^2 = 8 \;|\times 2$,

$x^2 = 16$,

$x_1 = \sqrt{16} = 4$,

$x_2 = -4$.

Ответ: x_1= 4; x_2= -4.

Пример 1.

Переносим -8 из левой части в правую, при этом не забываем менять знак на противоположный.

«Освобождаем» x^2 от дроби $\frac{1}{2}$, умножая обе части уравнения на 2.

Получаем простейшее квадратное уравнение.

Находим его корни.

Записываем ответ.

Пример 2.

$\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0$,

$\frac{1}{2}x^2 = -8$,

Ответ: корней нет.

Пример 2.

Переносим 8 из левой части в правую, при этом не забываем менять знак на противоположный.

В полученном уравнении левая часть всегда положительна, а правая отрицательна (какое бы значение ни принимала бы переменная), а следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения.

а) $\frac{5}{9}x^2 - 5 = 0$,

б) $25x^2 + 1 = 0$,

в) $3 = \frac{1}{3}x^2$,

г) $7x^2 - 2 = 0$,

д) $\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{3} + x\right) = -10x^2$,

е) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5} = \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{15}$,

ж) $\frac{1}{3}x^2 + 1 = 0$,

з) $(x-3)^2 = 9$,

и) $(1-x)^2 = \frac{25}{49}$,

к) $\left(\frac{1}{3} + 2x\right)^2 = 1\frac{7}{9}$.

Неполные квадратные уравнения вида (приводимые к виду):

$ax^2=0$,

$x^2 = \frac{0}{a}$,

$x^2 = 0$,

$x = 0$.

Такое уравнение имеет единственный корень, равный нулю.

Полные квадратные уравнения (приводимые к ним)

$ax^2+bx+c=0$		
$D=b^2-4ac$		
$D>0$	$D=0$	$D<0$
уравнение имеет два корня	уравнение имеет один корень	уравнение корней не имеет
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$	$x = \frac{-b}{2a}$	$\varnothing$

Алгоритм действий

0.Упростить уравнение и привести его к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

1.Определить, чему равны коэффициенты уравнения.

2.Вычислить его дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$.

3. а) если дискриминант больше нуля, то уравнение имеет два корня и их следует вычислить по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

б) если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет один корень и его следует вычислить по следующей формуле:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

в) если дискриминант меньше нуля, то уравнение корней не имеет.

4.Записать ответ.

Пример

$3x^2+5x-2=0$,	Выясняем, чему равны числа a, b и c. Для этого сравним данное уравнение с полным квадратным уравнением в общем виде: $ax^2+bx+c=0$. Первый коэффициент (он всегда стоит при x^2!!!): a=3; второй коэффициент (он всегда стоит при x!!!): b=5; свободный член: c=-2 (обрати внимание: "минус двум").
$D=5^2-4\cdot3\cdot(-2)=25+24=49>0$.	Вычисляем дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$ и сравним его с нулем. Дискриминант больше нуля, значит, уравнение имеет два корня.
$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot3}=\dfrac{-5-7}{6}=\dfrac{-12}{6}=-2$.	Вычисляем первый корень по формуле $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.
$x_2=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.	Вычисляем второй корень по формуле $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Так как эта формула отличается от предыдущей только знаком перед $\sqrt{D}$, то вычисления можно провести короче.
Ответ: $x_1=-2; x_2=\dfrac{1}{3}$.	Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения

$а)14x^2-5x-1=0,$	$д)-11y+y^2-152=0,$
$б)-y^2+3y+5=0,$	$е)18+3x^2-x=0,$
$в)2x^2+x+67=0,$	$ж)(2x-3)(5x+1)=2x+\dfrac{2}{5},$
$г)1-18p+81p^2=0,$	$з)-x(x+7)=(x-2)(x+2).$

Полные квадратные уравнения с чётным вторым коэффициентом

В некоторых случаях удобно пользоваться другой формулой для вычисления корней квадратного уравнения. Но будь осторожен! Её можно применять только тогда, когда второй коэффициент является ***чётным*** *числом, т. е. делится на два.*

$ax^2+2kx+c=0$ $b=2k$		
$D_1=k^2-ac$		
$D_1>0$	$D_1=0$	$D_1<0$
уравнение имеет два корня	уравнение имеет один корень	уравнение корней не имеет
$x_1=\dfrac{-k-\sqrt{D}}{a}$ $x_2=\dfrac{-k+\sqrt{D}}{a}$	$x=\dfrac{-k}{a}$	$\varnothing$

Пример

$4x^2-4x+1=0$,

Сравниваем данное уравнение с "шаблоном" $ax^2+2kx+c=0$;

первый коэффициент $a=4$, второй коэффициент $b=-4$ (обрати внимание «минус четыре»), свободный член $c=1$, а число $k=-2$ ($\frac{b}{2}=\frac{-4}{2}=-2$).

$D_1=(-2)^2-4\cdot 1=4-4=0$.

Вычисляем дискриминант по формуле $D_1=k^2-ac$ и сравниваем его с нулём.

Дискриминант равен нулю, значит, уравнение имеет один корень.

$x=\frac{-(-2)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Вычисляем его по формуле $x=\frac{-k}{a}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения

$а) y^2=52y-576,$

$б) 15y^2-30=22y+7,$

$в) 25p^2=10p-1,$

$г) y^2-12y+32=0,$

$д) 15x^2+17=15(x=1)^2,$

$е) (x-2)^2+48=(2-3x)^2,$

$ж) x^2-8x+9=0,$

$з) 2u^2-8u+5=0.$

Приведенные квадратные уравнения

Приведенное квадратное уравнение – это квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен единице.

В самых простых случаях для нахождения корней квадратного уравнения используют теорему Виета. Но важно помнить, что она пригодна только для ***приведённых*** *квадратных уравнений, т. е. таких в которых первый коэффициент равен одному:* $x^2+px+q=0$.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Пример

$y^2-4y+4=0$,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4, \\ y_1 \cdot y_2 = 4 \end{cases}$$

Ответ: $y=2$.

Легко догадаться, что $y_1=y_2=2$.

Совет: подбирая корни, следует сначала пользоваться вторым уравнением системы (произведением корней), а первое уравнение системы применять лишь для проверки предположения о значениях корней.

2.Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения

а) $x^2 - 28x + 75 = 0$,

б) $x^2 + 2x - 120 = 0$,

в) $x^2 + 10x - 5600 = 0$,

г) $x^2 + 10x - 7200 = 0$,

д) $x^2 - 11x + 30 = 0$,

е) $3x^2 + 14x - 40 = 0$,

ж) $c^2 + 4c - 4 = 0$,

з) $z^2 + 4s - 4 = 0$.

§4 Рациональные уравнения

Алгоритм решения рациональных уравнений

0.Разложить все знаменатели в уравнении на множители (если это возможно).

Примечание. В вашем «арсенале» для этого имеется три способа:

а) вынесение общего множителя за скобки;

б) формулы сокращенного умножения:

квадрат суммы двух выражений

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

квадрат разности двух выражений

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

разность квадратов двух выражений

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

сумма кубов двух выражений

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

разность кубов двух выражений

$$a^3 + b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

в) группировка.

1. Найти область допустимых значений переменной (ОДЗ), входящей в данное уравнение. Исключить такие значения, которые переменной «запрещено» принимать (такие, которые при подстановке вместо переменной обращают в нуль знаменатель).

Примечание. Если трудно сразу догадаться, при каких значениях переменной какой-либо из знаменателей обращается в нуль, нужно приравнять нулю соответствующий знаменатель и решить получившееся уравнение.

2. Найти наименьший (простейший) общий знаменатель (НОЗ), т. е. такой, который одновременно делится на все знаменатели уравнения.

3. Умножить обе части уравнения на НОЗ.

4. Получить целое уравнение.

5. Решить это уравнение.

6. Определить, не входят ли полученные корни целого уравнение в число "запрещенных" значений (если входят, то их надо отбросить).

7. Записать ответ.

Пример «попроще»

$$\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x}{3}$$

ОДЗ:

$x+2=0$

$x=-2$

$x\neq -2$

В данном уравнении знаменатели простые и их не надо раскладывать на множители.

Поэтому находим «запрещенные» для x значения. Конечно, сразу можно догадаться, что это число –2. Именно при этом значении первый знаменатель обращается в нуль, а этого нельзя допустить. (Тем же, кого не посетило озарение, придется решить простое уравнение, приравняв знаменатель нулю).

$НОЗ: 3(x+2)$

Находим наименьший общий знаменатель. Он представляет собой произведение знаменателей уравнения, так как именно оно делится и на первый и на второй знаменатели.

$$\frac{x^2+4x^{\{3\}}}{x+2}=\frac{2x^{\{x+2\}}}{3}\quad\Big|\cdot 3(x+2)$$

Умножаем обе части уравнения на НОЗ. Над каждым числителем надписываем (для себя) «дополнительный множитель».

$3(x^2+4x)=2x(x+2)$

$3x^2+12x=2x^2+4x$

$3x^2-2x^2+12x-4x=0$

$x^2+8x=0$

$x(x+8)=0$

$x=0$ или $x+8=0$

$x=-8$

Умножаем числители на соответствующие «дополнительные множители». Получаем целое уравнение, которое решать умеем. Решаем его.

Ни один из корней целого уравнения в нашем случае не входит в число «запрещённых» («запрещённое» значение «минус два» – смотри ОДЗ!!!).

Ответ: $x_1=0, x_2=-8.$

Пишем ответ.

Пример «посложнее»

$$\frac{10}{y^3-y}+\frac{1}{y-y^2}=\frac{1}{1+y}$$

Разложим все знаменатели в уравнении на множители:

в первом знаменателе вынесем общий множитель за скобку;

во втором также вынесем общий множитель за скобку;

третий знаменатель оставим без изменения.

$$\frac{10}{y\left(y^2-1\right)}+\frac{1}{y(1-y)}=\frac{1}{1+y}$$

На этом разложение не заканчиваем. В полученном уравнении второй множитель первого знаменателя разложим на множители, воспользовавшись формулой разности квадратов двух выражений: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\frac{10}{y(y-1)(y+1)}+\frac{1}{y(1-y)}=\frac{1}{1+y}$$

Меняем знак перед второй дробью (при этом переставляем слагаемые в скобках знаменателя местами).

$$\frac{10^{\{1\}}}{y(y-1)(y+1)}-\frac{1^{\{y+1\}}}{y(y-1)}=\frac{1^{\{y(y-1)\}}}{1+y}$$

ОДЗ:

$y(y-1)(y+1)=0$

$y=0$ или $y-1=0$ или $y+1=0$

$y=1$ $y=-1$

$y\neq 0, y\neq 1, y\neq -1$

Находим ОДЗ, приравнивая первый знаменатель нулю (остальные приравнивать нулю не имеет смысла, так как ничего нового мы не получим). Подумай, почему?

НОЗ $: y(y-1)(y+1)$

Находим НОЗ.

$$\frac{10^{\{1\}}}{y(y-1)(y+1)}-\frac{1^{\{y+1\}}}{y(y-1)}=\frac{1^{\{y(y-1)\}}}{1+y}\ \Big|\cdot y(y-1)(y+1)$$

Умножаем обе части уравнения на НОЗ. Над каждым числителем надписываем «дополнительные множители».

Умножаем числители на соответствующие «дополнительные множители».

$10-(y+1)=y(y-1)$

Получаем целое уравнение.

$10-y-1=y^2-y$

$9=y^2$

$y^2=9$

Решаем его.

$y_1=\sqrt{9}=3$

$y_2=-3$

Проверяем, не входят ли полученные корни в число «запрещённых» (смотри ОДЗ).

Ответ: $y_1=3, y_2=-3$.

Записываем ответ.

Примеры для самостоятельного решения

«Попроще»

а) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$,

б) $\frac{x+15}{4}-\frac{21}{x+2}=2$,

в) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$,

г) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3$,

«Посложнее»

д) $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{28}{1-x^2}$,

е) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$,

ж) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+3}{x-2}=\frac{29}{(x+1)(x-2)}$,

з) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x+3)(x-1)}$.

<u>Шпаргалка</u>

«Квадратные уравнения»

<u>1 неп. кв. ур.</u>

а) $ax^2+bx=0$, **вынести об. мн..**	**б)** $ax^2+c=0$, **перенес.** c **вправо.**	**в)** $ax^2=0$, $x=0$.

<u>2 полн. кв. ур..</u>

а) $ax^2+bx+c=0$,	**б)** $ax^2+2kx+c=0$,	**в)** $x^2+px+q=0$,
$D=b^2-4ac$.	$D_1=k^2-ac$.	$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$
1) $D>0$:	**1)** $D_1>0$:	
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$,	$x_1=\dfrac{-k-\sqrt{D}}{a}$,	
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.	$x_2=\dfrac{-k+\sqrt{D}}{a}$.	
2) $D=0$:	**2)** $D_1=0$:	
$x=\dfrac{-b}{2a}$.	$x=\dfrac{-k}{a}$.	
3) $D<0$:	**3)** $D_1<0$:	
$\varnothing$.	$\varnothing$.	